数理解析研究所講究録
726巻 1990年 97-110

NoisyからSilentへ移行する非0和ゲーム

姫路工業大学 寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)
神戸大学 中井達 (Toru Nakai)

1. 緒言

2個以上の行動主体がある目的の為互に競争状態にあるゲームの立場においては，相手の行動を学習できるかできないかといった情報の問題は非常に重要な位置を占めており，幾多の研究がなされている．ここでは，2人のプレーヤが，互に相手の行動を観測可能な状態から観測不能な状態へ変化したり逆に観測不能な状態から観測可能な状態へ変化するといった情報様式に変化の伴うゲームに関して簡単なモデルを提案し，前者のモデルについて解析する．

ここで取扱うモデルは以下のような動機づけによる：

ある製品(例えばコンピュータ)で市場を独占している2つの会社(Player I, II)があり，互に新製品の開発の時期を考えている．Player I, IIは区間[0, 1]内のどの時点でも行動(開発の着手)できるが，早くはじめると周りの環境

が整わない為成功の確率が低く 遅くはじめるにつれ成功の確率は高くなり 時点1では確実に開発に成功する．しかしながらあまり遅すぎると，相手が先に開発してしまい市場を独占されてしまう可能性も高くなる．このような状況の下で何時着手すべきかを考えなければならない．なおここでは失敗は許されずチャンスは1回しかないものとする．これはよく知られたタイミングのゲームであるが，このタイミングのゲームでは相手の行動時刻を情報として与えられるか否かでPlayerの戦略が決定的に変ってくる．タイミングのゲームでは自分の行動時刻を相手に知られてしまう場合noisy bulletを持っているといい，もう既に行動をとったのかまだとっていないのかが相手に知られない場合をsilent bulletを持っているといっている．そしてこの様式に応じて，noisy型，silent型，silent-noisy型と多くの研究者によって定式化と解析が試みられた[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]．

ところで，このような問題にあっては，従来Playerのbulletは最初からsilentかnoisyかが定まった報告がほとんどであった．例外的に寺岡[7]によるsilentかnoisyかが不確実なモデルの報告があるが，これもどちらかがわからないだけで最初から定まったモデルの1つの変形と考えてよい．現実の舞台にあっては，ある時点までは情報のたれ流しをやってい

てもその時点を過ぎると突然秘密保持に徹したり，逆に最初は秘密を維持できたものがある時点から情報がつつ抜けになってしまうと考えられる例をよく見る．このモデルを扱ったのが寺岡による silent から noisy へ移行するゲーム [11] であった。ここでは，この続きとして逆に noisy から silent へ移行するゲームを確率的移行 [12] と非確率的移行に分けて提案し，解析する．

2 仮定と記号

$A_1(t)$ と $A_2(t)$ をそれぞれ Player I, II の精度関数とする．精度関数は t につき連続的微分可能であり，$A_1(0)=A_2(0)=0$, $A_1(1)=A_2(1)=1$，かつ $A_1'(t)>0$; $A_2'(t)>0$ for $t\in[0,1)$ であると仮定する．次にこのゲームでは，両 player の所有する bullet が，ranodom time $T\in[0,1]$ with cdf $K(t)=\Pr\{T\leqq t\}$ で，noisy から silent へ移行するものとする．そして cdf $K(t)$ は非減少関数で $K(0)<1$; $K(1)=1$ とのみ仮定しさらに方程式

$$\{A_1(t)+A_2(t)-1\}+\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}K(t)=0 \qquad (1)$$

が $[0,1]$ で少なくとも1つ根をもつものとの仮定を加える。この仮定はそれほど不自然ではない。もし $K(t)$ が連続型であるとすると (1) の根は唯一つ存在する．また cdf $K(t)$ が

$[0, t_N]$ で jump がなく $K(t_N) > 0$ とすると根は存在する，ここに t_N は方程式 $A_1(t) + A_2(t) - 1 = 0$ の $(0, 1)$ における根である．そこで区間 $[0, 1]$ における方程式 (1) の最大根を t_0 と書くことにする．

ここで取扱うゲームは非0和型とする．すなわち勝者つまり先に成功した方は敗者からではなく umpire から $+1$ の return を受取るものとする．したがって両 player は自分の負けない確率を互に相手の行動をにらみながら最大にしようとすることになる．もし，両方同時に行動し両者共行動した時には Player I は $\Phi_1(t)$ を II は $\Phi_2(t)$ を受取るものとする，ここに t は両者は同時行動時刻である．通常の市場占有の問題では $\Phi_1(t) = \lambda_1 A_1(t)$; $\Phi_2(t) = \lambda_2 A_2(t)$ となり，ここに λ_1 と λ_2 は市場の占有率を意味することになるが，ここでは

$$0 < \Phi_1(t) < A_1(t) \ ; \ 0 < \Phi_2(t) < A_2(t) \quad \text{for each } t \in [0, 1]$$

とのみ簡単な形で仮定しておく．

後の議論の為，$\theta_i(t)$ と $U_i(z|l)$ を次のように定義する：

$$\theta_i(t) = \frac{A'_{3-i}(t)}{\{A_1(t) + A_2(t) - 1\} + \{1 - A_1(t)\}\{1 - A_2(t)\}K(t)}, \quad t \in (t_0, 1]$$

$$U_i(z|l) = e^{-\int_l^z [1 - \{1 - A_i(t)\}K(t)]\,\theta_i(t)\,dt}, \quad z \in [l, 1] \subset (t_0, 1],$$

for $i = 1, 2$.

3. 定式化

このゲームでは，$\{t \mid K(t)=1\}$をのぞいて，まだ noisy の状態にあるのか，既に silent の状態へ移行してしまっているのか，わからないが，純戦略としては noisy duel のそれと同じである。したがって Player I, II の純戦略を

「xはPlayer I の純戦略であり，この意味は，I はまず点xを$[0,1]$内に選び もし II がこのxまでに既に行動とったことを I が学習できるようであれば点1まで待って行動しxまで待っても何の情報も得られない時は点xで行動する；

yはPlayer II の純戦略であり，I にとってのxとまったく同様の内容を持つ。」

と定めることができる。そうすると Player i への期待利得$M_i(x,y)$は次のように与えられる$(i=1,2)$：

$$M_1(x,y)=\begin{cases} A_1(x) & x<y \\ \Phi_1(x) & x=y\,; \\ \{1-A_2(y)\}[K(y)A_1(x)+\{1-K(y)\}], & x>y \end{cases} \tag{2}$$

$$M_2(x,y)=\begin{cases} A_2(y), & y<x \\ \Phi_2(y), & y=x \\ \{1-A_1(x)\}[K(x)A_2(y)+\{1-K(x)\}], & y>x\,. \end{cases} \tag{3}$$

ここで，I と II はそれぞれ混合戦略として$[0,1]$上の cdf's $F(x)$と$G(y)$を用いるものとし，この混合戦略に対してよく

似た記号を用いるが，$M_i(x,y)$ の期待値に関する記号として

$$M_i(F,G)=\int_0^1\int_0^1 M_i(x,y)\,dF(x)\,dG(y),$$

$$M_i(x,G)=\int_0^1 M_i(x,y)\,dG(y)\quad ;\quad M_i(F,y)=\int_0^1 M_i(x,y)\,dF(x)$$

を用いるものとする．

4．解析

Player Ⅰ の混合戦略 $F(x)$ は区間 $[a,1]\subset[0,1]$ 上の density part $f(x)>0$ と点1での mass part $\alpha\geqq 0$ で構成され，Ⅱの混合戦略 $G(y)$ は同じ区間上の density part $g(y)>0$ と点1での mass part $\beta\geqq 0$ で構成されると想定すると

$$M_1(x,G)=\begin{cases} A_1(x), & x<a \\ A_1(x)\int_a^x K(y)\{1-A_2(y)\}g(y)\,dy & \\ \quad +\int_a^x\{1-K(y)\}\{1-A_2(y)\}g(y)\,dy & \\ \quad +A_1(x)\{1-G(x)\}, & a\leqq x<1 \\ A_1(1)\int_a^1 K(y)\{1-A_2(y)\}g(y)\,dy & \\ \quad +\int_a^1\{1-K(y)\}\{1-A_2(y)\}g(y)\,dy & \\ \quad +\beta\Phi_1(1), & x=1 \end{cases}\tag{4}$$

$$M_2(F,y)=\begin{cases} A_2(y) & y<a \\ A_2(y)\int_a^y K(x)\{1-A_1(x)\}f(x)\,dx & \\ \quad +\int_a^x\{1-K(x)\}\{1-A_1(x)\}f(x)\,dx & \\ \quad +A_2(y)\{1-F(y)\}, & a\leqq y<1 \end{cases}\tag{5}$$

$$
\begin{cases}
A_2(1)\int_a^1 K(x)\{1-A_1(x)\}f(x)dx \\
\quad + \int_a^1 \{1-K(x)\}\{1-A_1(x)\}f(x)dx \\
\quad + \alpha\Phi_2(1), & y = 1
\end{cases}
$$

が得られる．そうすると

$$M_2(F, y) \equiv const \quad for \quad y\in[a,1)\ ;\ M_1(x, G) \equiv const \ for \ x\in[a,1)$$

を満足する F と G は

$$f(x) = \theta_1(x)\,U_1(x|a),\quad t_0 < a \leqq x < 1\ ; \qquad (6)$$

$$g(y) = \theta_2(y)\,U_2(y|a),\quad t_0 < a \leqq y < 1, \qquad (7)$$

となる density parts を持つこととなる．

LEMMA 1．任意に与えられた $z < t_0$ に対して

$$\int_l^z [1-\{1-A_i(t)\}K(t)]\,\theta_i(t)dt \uparrow \infty \quad as \quad l \downarrow t_0$$

が成立 $(i = 1, 2)$．したがって $U_i(z|l)$ は任意に固定された $l\in(t_0, 1)$ に対して z につき非増加関数であることがわかる．▨

次に，この LEMMA 1 および

$$\int_{z_1}^{z_2}[1-\{1-A_1(x)\}K(x)]f(x)dx = U_1(z_1|a) - U_1(z_2|a)\ ;$$

$$\int_{z_1}^{z_2}[1-\{1-A_2(y)\}K(y)]g(y)dy = U_2(z_1|a) - U_2(z_2|a)$$

を使うと，次の命題が証明できる：

任意に固定された $\alpha\in[0,1]$ と $\beta\in[0,1]$ とに対して $a\in[0,1]$ に関する方程式

$$F(1-0) = \int_a^1 f(t)dt = 1-\alpha\ ;\ G(1-0) = \int_a^1 g(t)dt = 1-\beta$$

の各々は，区間 $(t_0, 1)$ で唯1つの根をもつ．▥

以上より次のような2つの cdf を得る：

$$F^\circ(x)=\begin{cases}0, & 0\leqq x<a\\ \int_a^x \theta_1(t)U_1(t|a)dt+\alpha I_1(x), & a\leqq x\leqq 1\end{cases};\quad (8)$$

$$G^\circ(y)=\begin{cases}0, & 0\leqq y<a\\ \int_a^y \theta_2(t)U_2(t|a)dt+\beta I_1(y), & a\leqq y\leqq 1,\end{cases}\quad (9)$$

ここに $I_1(z)$ は $z=1$ での unit-step function であり，α と β は，方程式

$$\int_a^1 \theta_1(t)U_1(t|a)dt=1\ ;\ \int_a^1 \theta_2(t)U_2(t|a)dt=1$$

の2つの根の両方より以上である a に対して

$$\alpha=1-\int_a^1\theta_1(t)U_1(t|a)dt\ ;\ \beta=1-\int_a^1\theta_2(t)U_2(t|a)dt$$

で与えられる．

そうすると，次の2つの関係式が成立する：

$$M_1(x,G^\circ)=\begin{cases}A_1(x)<A_1(a)=v_1, & x<a\\ M_1(a,G^\circ)=A_1(a)=v_1, & a\leqq x<1\\ v_1-\beta\{1-\Phi_1(1)\}, & x=1\end{cases};\quad (10)$$

$$M_2(F^\circ,y)=\begin{cases}A_2(y)<A_2(a)=v_2, & y<a\\ M_2(F^\circ,a)=A_2(a)=v_2, & a\leqq y<1\\ v_2-\alpha\{1-\Phi_2(1)\}, & y=1.\end{cases}\quad (11)$$

ところで，$\Phi_1(1)<1$ かつ $\Phi_2(1)<1$ と仮定してあるので，$\alpha\beta=0$ を満足するように α と β を選ぶと，(F°, G°) が非0和

2人ゲーム (2), (3) の1対の平衡戦略を構成することとなる。

THEOREM 1. $\{A_1(t)+A_2(t)-1\}+\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}K(t)=0$ の区間 $[0,1]$ における根の存在を仮定し その根の中で最大なものを t_0 とする。さらに a_1 と a_2 を a についての方程式

$$\int_a^1 \theta_1(t)U_1(t|a)dt=1 \quad ; \quad \int_a^1 \theta_2(t)U_2(t|a)dt=1$$

の区間 $[t_0,1]$ における唯一根とし, $a=\max(a_1,a_2)$ とおく。そうすると, 非0和2人ゲーム (2), (3) の平衡点は存在し以下の cdfs $F^0(x)$ と $G^0(y)$ で与えられる:

$$F^0(x)=\begin{cases} 0, & 0 \leqq x < a \\ \int_a^x \theta_1(t)U_1(t|a)dt+\alpha I_1(x), & a \leqq x \leqq 1 \end{cases};$$

$$G^0(y)=\begin{cases} 0, & 0 \leqq y < a \\ \int_a^y \theta_2(t)U_2(t|a)dt+\beta I_1(y), & a \leqq y \leqq 1, \end{cases}$$

ここに $I_1(z)$ は $z=1$ における unit-step function であり, mass parts α と β は以下のように定められる。

$a=a_1>a_2 \Rightarrow \alpha=0$ かつ $\beta=1-G^0(1-0)>0$,

$a=a_1=a_2 \Rightarrow \alpha=\beta=0$,

$a=a_2>a_1 \Rightarrow \alpha=1-F^0(1-0)>0$ かつ $\beta=0$.

そして, このゲームの平衡値 v_1^0 to Player I と v_2^0 to Player II は

$$v_1^0=A_1(a) \quad ; \quad v_2^0=A_2(a)$$

で与えられる。 ▨

Note (i) もし $\Phi_1(1)=\Phi_2(1)=1$ と仮定するとこのゲームの平衡点は無数に存在する．すなわち

$$F^\circ(x)=\begin{cases}0, & 0\leqq x<b\\ \int_b^x \theta_1(t)U_1(t|b)\,dt+\alpha I_1(b), & b\leqq x\leqq 1\end{cases};$$

$$G^\circ(y)=\begin{cases}0, & 0\leqq y<b\\ \int_b^y \theta_2(t)U_2(t|b)\,dt+\beta I_1(b), & b\leqq y\leqq 1,\end{cases}$$

ここに b は区間 $[a,1]$ 内の任意の数であり，a は THEOREM 1 で与えられる．さらに α と β は $b=a$ の時をのぞいて共に正となる．そしてこの時の平衡値は

$$v_1^\circ=A_1(b)\quad;\quad v_2^\circ=A_2(b).$$

(ii) t_N を $A_1(t)+A_2(t)=1$ の $[0,1]$ における唯一根とし，この t_N に対して $K(t_N)=0$ となった時は

$$\{A_1(t)+A_2(t)-1\}+\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}K(t)\begin{Bmatrix}<\\=\\>\end{Bmatrix}0\quad \text{if } t\begin{Bmatrix}<\\=\\>\end{Bmatrix}t_N$$

となり，したがって t_0 は t_N と一致する．この時 $a=a_1=a_2=t_N$ が得られ LEMMA 1 と $\int_a^1\theta_i(t)U_i(t|a)\,dt\geqq 1-U_i(1|a)$ for $a\in(t_N,1)$ を用いることによって

$$\lim_{a\downarrow t_N}F^\circ(z)=\lim_{a\downarrow t_N}G^\circ(z)=\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\ \text{for}\ z\begin{Bmatrix}<\\\geqq\end{Bmatrix}t_N$$

が成立する．上記の2つの混合戦略は noisy duel における saddle point を構成する．▨

5．非確率的移行のゲーム

ここでは noisy から silent への移行が非確率的 すなわち

$$K(t)=\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\quad \text{for}\quad t\begin{Bmatrix}\leqq\\>\end{Bmatrix}m$$

の場合を考える．これは前節までの結果の特別な場合とはなっておらず，これ自体が独立の問題を与えることがわかる．

この時，$t\leqq m$ に対しては $\{A_1(t)+A_2(t)-1\}+\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}K(t)=A_1(t)+A_2(t)-1$ であり，$t>m$ に対しては $\{A_1(t)+A_2(t)-1\}+\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}K(t)=A_1(t)A_2(t)$ となるから，$m>t_N$ に限り $\{A_1(t)+A_2(t)-1\}+\{1-A_1(t)\}\{1-A_2(t)\}K(t)=0$ は根をもつ，ここに t_N は $A_1(t)+A_2(t)-1=0$ の $[0,1]$ での唯一根．しかしながら $m>t_N$ に対しては $K(t_N)=0$ である．したがって (t_N,t_N) は $m>t_N$ に対しての ε-平衡戦略を構成．

以上より，$m\leqq t_N$ の時が重要な関心事となる．この場合の Player I，II への期待利得は

$$M_1(x,y)=\begin{cases}A_1(x), & x<y\\ \Phi_1(x), & x=y\\ 1-A_2(y), & y\leqq \min(x,m)\leqq t_N\\ \{1-A_2(y)\}A_1(x), & m\leqq \min(y,t_N)<x\end{cases};\qquad (12)$$

$$M_2(x,y)=\begin{cases}A_2(y), & y<x\\ \Phi_2(y), & y=x\end{cases}\qquad (13)$$

$$\begin{cases} 1-A_1(x), & x \leqq \min(y, m) \leqq t_N \\ \{1-A_1(x)\}A_2(y), & m \leqq \min(x, t_N) < y, \end{cases}$$

となるが この非0和2人ゲームの平衡戦略は存在するかどうかわからない。しかしながら，$\Phi_1(1)=\Phi_2(1)=1$ の時に限って，次の THEOREM 2 が成立する.

THEOREM 2. t_N を $A_1(t)+A_2(t)-1=0$ の区間 $[0,1]$ での唯一つの根とし，a_1 と a_2 をそれぞれ a に関する方程式

$$\int_a^1 \frac{A_2'(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2}dt = \frac{1}{A_2(a)} \quad ; \quad \int_a^1 \frac{A_1'(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2}dt = \frac{1}{A_1(a)}$$

の区間 $[0,1]$ における唯一根とし，さらに $a=\max(a_1,a_2)$ とせよ。そうすると $\max(a_1,a_2)<m<t_N$ でかつ $\Phi_1(1)=\Phi_2(1)=1$ の時の非0和2人ゲーム (12)，(13) の平衡戦略は以下のような I にとっては $F^*(x)$ で，II にとっては $G^*(y)$ で与えられる：

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & 0 \leqq x < b \\ \displaystyle\int_b^x \frac{A_2(b)A_2'(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2}dt + \alpha I_1(x), & b \leqq x \leqq 1 \end{cases} ;$$

$$G^*(y)=\begin{cases} 0, & 0 \leqq y < b \\ \displaystyle\int_b^y \frac{A_1(b)A_1'(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2}dt + \beta I_1(y), & b \leqq y \leqq 1, \end{cases}$$

ここに，$I_1(z)$ は $z=1$ での unit-step function であり，

bは$[m, 1)$内の勝手な点であり initial firing time を意味している．そして mass parts については

$$\alpha = 1 - F^*(1-0) > 0 \quad ; \quad \beta = 1 - G^*(1-0) > 0$$

が成立する．この場合の平衡値 v_1^*, v_2^* は

$$v_1^* = A_1(b) \quad ; \quad v_2^* = A_2(b)$$

で与えられる．▨

証明は省略するが，$\Phi_1(1) = \Phi_2(1) = 1$ を仮定している為，本質的には非0和 silent duel と同じ内容となっていることを示せばよい．

$\Phi_1(1) < 1$ or $\Phi_2(1) < 1$ の時は残された問題である．しかし，この場合には平衡戦略が従来のクラスの混合戦略の中に存在するかどうかわからない．また，この報告では非0和ゲームとして定式化しているが，0和型のモデルの方が数学的には面白い，しかし解析が困難である．

REFERENCES

1. M. Dresher, Games of Strategy: Theory and Applications, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1954.
2. M. Fox and G. Kimeldorf, Noisy Duels, SIAM J. Appl. Math. Vol. 17, 1969, pp.353-361.
3. S. Karlin, Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics II, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.

4. M. Sakaguchi, Marksmanship Contests - Nonzero Sum Games of Timing, Math. Japonica, Vol. 22, 1978, pp.585-596.
5. C. Sweat, A Single-Shot Noisy Duel with Detection Uncertainty, Operations Research, Vol. 19, 1971, pp.170-181.
6. Y. Teraoka, Noisy Duel with Uncertain Existence of the Shot, Int. Journal of Game Theory, Vol. 5, 1976, pp.239-249.
7. Y. Teraoka, A Single-Bullet Duel with Uncertain Information Available to the Duelists, Bull. of Math. Stat., Vol. 18, 1979, pp.69-83.
8. Y. Teraoka, A Two Person Game of Timing with Random Termination, Journ.Optimization Theory and Appl., Vol. 40, 1983, pp.379-396.
9. Y. Teraoka, On the Simple N-Person Games of Timing with Random Termination, Journ.Information & Optimi. Sciences, Vol. 5, 1984, pp.269-278.
10. Y. Teraoka, Silent-Noisy Marksmanship Contest with Random Termination, Journ.Optimization Theory and Appl., Vol. 49, 1986, pp.477-487.
11. Y. Teraoka, A Game of Timing in which Players Improve their Information Patterns, Journ. Information & Optimi. Sciences, Vol. 9, 1988, pp.17-31.
12. Y. Teraoka and T. Nakai, A Game of Timing which Shifts Stochastically from a Noisy Version to a Silent Version, to be published in Journ. Information & Optimi. Sciences, 1990.